Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 6

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 6.1. Bestimme für die parametrisierte Kurve

$$x = -3t^2 + 4t - 2 \text{ und } y = 2t^2 + 5t - 3$$

eine Kurvengleichung.

Aufgabe 6.2.*

Sei K ein Körper. Betrachte die durch

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\ t \longmapsto (t + t^2, t^3) = (x, y)\,,$$

definierte Parametrisierung. Bestimme eine (nichttriviale) algebraische Gleichung, die für alle Bildpunkte dieser Abbildung erfüllt ist. Man gebe auch einen Punkt in der affinen Ebene an, der nicht auf der Bildkurve liegt.

Aufgabe 6.3. Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $a \in K$ von null verschieden. Zeige, dass das Polynom

$$X^2 + Y^2 + a \in K[X, Y]$$

irreduzibel ist.

Aufgabe 6.4. Beweise Lemma 6.9.

Aufgabe 6.5. Sei $P = (a, b)$ ein Punkt in der affinen Ebene und L und L' verschiedene Geraden durch P. Es sei $C = V(F)$, $F \in K[X, Y]$, eine ebene algebraische Kurve. Beschreibe explizit eine Variablentransformation (einen Koordinatenwechsel) derart, dass in den neuen Koordinaten P der Nullpunkt wird und die Geraden zum Achsenkreuz werden. Wie lautet die Kurvengleichung in den neuen Koordinaten?

Aufgabe 6.6. Zeige, dass für affin-algebraische Mengen $V, V' \subseteq \mathbb{A}_K^n$ die Beziehung der affin-linearen Äquivalenz eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 6.7. Sei $\varphi : \mathbb{A}_K^2 \to \mathbb{A}_K^2$ eine polynomiale Abbildung und sei C eine ebene rationale Kurve. Es sei ferner vorausgesetzt, dass C durch φ nicht auf einen einzigen Punkt abgebildet wird. Zeige, dass dann $\overline{\varphi(C)}$ ebenfalls eine rationale Kurve ist.

Aufgabe 6.8. Wir betrachten die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^2 \supseteq D(s) \longrightarrow \mathbb{A}_K^3,\ (s,t) \longmapsto (s, t^2/s, t) = (x,y,z)\,.$$

Bestimme eine algebraische Gleichung F für das Bild. Untersuche die Abbildung auf Injektivität und Surjektivität (als Abbildung nach $V(F)$). Vergleiche diese Abbildung mit den in Aufgabe 6.8 diskutierten Abbildungen.

Aufgabe 6.9. Es sei K ein Körper und $K[X_1,\ldots,X_n]$ der Polynomring über K in n Variablen und $K[X_1,\ldots,X_n,Z]$ der Polynomring in $n+1$ Variablen. Zu $F \in K[X_1,\ldots,X_n]$ sei $\hat{F} \in K[X_1,\ldots,X_n,Z]$ die Homogenisierung (bezüglich Z) und zu $G \in K[X_1,\ldots,X_n,Z]$ sei $\tilde{G}$ die (durch $Z \mapsto 1$ gegebene) Dehomogenisierung von G. Zeige, dass $\tilde{\hat{F}} = F$, aber nicht $\hat{\tilde{G}} = G$ gelten muss.

Aufgabe 6.10. Es sei K ein Körper und $K[X_1,\ldots,X_n,Z]$ der Polynomring über K in $n+1$ Variablen. Es seien $G,H \in K[X_1,\ldots,X_n,Z]$ zwei homogene Polynome vom gleichen Grad. Für die Dehomogenisierungen (bezüglich Z) gelte $\tilde{G} = \tilde{H}$. Zeige, dass dann $G = H$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Die folgende Aufgabe erfordert eventuell den Einsatz eines Computers.

Aufgabe 6.11. (6 Punkte)

Bestimme für die Abbildung

$$\mathbb{A}_K^1 \longrightarrow \mathbb{A}_K^2,\ t \longmapsto (t^2+t^3, 2t^2-t^4)\,,$$

eine algebraische Gleichung der Bildkurve.

Aufgabe 6.12. (5 Punkte)

Wir betrachten die beiden Abbildungen

$$(s,t) \longmapsto (s^2,t^2,st) = (x,y,z) \text{ und } (s,t) \longmapsto (s, st^2, st) = (x,y,z)\,.$$

Zeige, dass das Bild der beiden Abbildungen die gleiche algebraische Gleichung F erfüllt. Untersuche die Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität (als Abbildung nach $V(F)$). Welche Abbildung liefert eine „bessere“ Beschreibung von $V(F)$?

Aufgabe 6.13. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und $F \in K[X, Y]$ ein irreduzibles Polynom. Die Nullstellenmenge $V(F)$ sei unendlich. Dann ist $V(F)$ eine irreduzible affin-algebraische Menge.

Man gebe auch ein Beispiel, dass diese Aussage in drei Variablen falsch ist.