Zahlentheorie (Osnabrück SS 2008)

Arbeitsblatt 11

Aufgabe 1. (3 Punkte)

Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, die modulo 4 den Rest 3 besitzen.

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, die modulo 4 den Rest 1 besitzen.

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Von wievielen Zahlen ist 'durchschnittlich' die Zahl 7 der kleinste Primteiler? Erläutere dabei, warum diese Frage durchaus einen Sinn macht. Beschreibe alle Zahlen, deren kleinster Primteiler 7 ist (begründe!).

Beantworte die entsprechenden Fragen für eine beliebige Primzahl. Bis zu welcher Primzahl p muss man gehen, damit durchschnittlich mindestens 80) aller Zahlen einen Primteiler $\leq p$ besitzen.

Aufgabe 4. (3 Punkte)

Sei $a > 1$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die Anzahl

$$\pi(ax) - \pi(x)$$

unbeschränkt ist.

Aufgabe 5. (2 Punkte)

Berechne den Wert der Reihe

$$\textstyle\sum_{n \in M(\{3,5,7\})} \frac{1}{n^4} \ .$$

Aufgabe 6. (3 Punkte)

Berechne das unendliche Produkt

$$\textstyle\prod_{p \in \mathbb{P},\, p \geq 7} \frac{1}{1-p^{-2}} \ .$$

Aufgabe 7. (3 Punkte)

Begründen Sie die Einzelschritte im Beweis zum Lemma über die Produktdarstellung, in dem Sie den Beweis in Ihre Benutzerseite kopieren und die Gründe in die vorgesehenen Fenster eintragen.

Die folgenden Aufgaben haben nicht direkt mit der elften Vorlesung zu tun, sondern wiederholen ältere Situationen. Man kann sich auch an den liegengelassenen und sitzengebliebenen Aufgaben gerne noch einmal probieren.

Aufgabe 8. (3 Punkte)

Bestimme die Zerlegung von $X^{p-1}-1$ in irreduzible Polynome im Polynomring $\mathbb{Z}/(p)[X]$. Beweise aus dieser Zerlegung erneut den Satz von Wilson.

Aufgabe 9. (4 Punkte)

Sei p eine Primzahl mit $p = 1 \mod 4$. Zeige unter Verwendung des Satzes von Wilson, dass $\frac{p-1}{2}!$ eine Quadratwurzel von -1 ist.

Aufgabe 10. (3 Punkte)

Sei p eine Primzahl mit $p = 1 \mod 4$ und sei $p = x^2 + y^2$ eine Darstellung als Summe von zwei Quadraten, $x, y \in \mathbb{N}$. Sei k ein ungerader Teiler von x. Dann ist k ein Quadratrest modulo p.

Aufgabe 11. (2 Punkte)

Sei n eine natürliche Zahl, die modulo 8 den Rest 7 besitzt. Dann ist n nicht darstellbar als Summe von drei Quadraten.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Beschreibe die nilpotenten Elemente von $\mathbb{Z}/(n)$ und die Reduktion von $\mathbb{Z}/(n)$.

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) In der Primfaktorzerlegung von n kommt jeder Primfaktor mit Exponent 1 vor.
(2) Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ ist reduziert.
(3) Der Restklassenring $\mathbb{Z}/(n)$ ist das Produkt von Körpern.

Aufgabe 14. (6 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass die Menge der nilpotenten Elemente in R ein Ideal bilden (dieses nennt man das Nilradikal von R).

Zeige ferner, dass zu einem nilpotenten Element $f \in R$ das Element $1 + f$ eine Einheit ist.

Bestimme in $\mathbb{Z}/(9)$ die nilpotenten Elemente und zeige, dass die Zuordnung $f \longmapsto 1 + f$ ein Gruppenisomorphismus zwischen dem Ideal der nilpotenten Elementen und einer gewissen Untergruppe U der Einheitengruppe $(\mathbb{Z}/(9))^{\times}$ ist.

Beschreibe die Einheitengruppe als direktes Produkt von U mit einer weiteren Untergruppe.